RELATION ENTRE LA DÉRIVÉE DE GATEAU ET LA DÉRIVÉE CLASSIQUE

PIERRE-OLIVIER PARISÉ

Résumé. Nous présentons la définition de la dérivée au sens de Gateau d'une fonction d'une variable réelle et nous montrons un lien intéressant avec la dérivée classique. Précisément, nous montrons que la dérivée de Gateau en un point x est linéaire si, et seulement si, la dérivée au sens classique existe en ce point. D'un point de vue pédagogique, ce point de vue permet de mieux motiver l'introduction de la dérivée de fonctions de plusieurs variables comme une application linéaire. Ce dernier fait est parfois très surprenant pour un étudiant.

Introduction

La définition classique de la dérivée qui est enseignée dans les cours d'Analyse est, à ma connaissance, la suivante.

Définition 1. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est* ***dérivable*** *au point $x \in \mathbb{R}$ si la limite suivante existe*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1}$$

Dans ce cas, on pose $f'(x)$ comme étant la limite (1) *et $f'(x)$ est la dérivée de f au point x.*

Lorsqu'on apprend la définition de la dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la remarque populaire qui suit la définition est que la dérivée $Df(x)$ est une application linéaire (matrice) de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. La seule motivation qu'on donne à cette définition est que la dérivée classique d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application linéaire. On ne l'avait juste pas remarqué... À ma défense, la définition 1 ne nourrit pas l'intuition nous menant à penser que la dérivée $f'(x)$ est une application linéaire.

Dans ce court texte, je me propose de vous présenter une avenue pour mieux comprendre pourquoi on exige que la dérivée de fonctions de plusieurs variables soit une application linéaire (matrice). Ce point de vue est basé sur la définition de la dérivée « directionnelle ».

Définition 2. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est* ***différentiable*** *au point $x \in \mathbb{R}$ si pour tout $v \in \mathbb{R}$, la limite suivante existe :*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+vh) - f(x)}{h} \tag{2}$$

Dans ce cas, on pose $df(x,v)$ comme étant la limite (2)*.*

Notons que, d'après cette définition, nous avons toujours que $df(x,0) = 0$ quelque soit $x \in \mathbb{R}$ et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Le but de cette note est de montrer la relation suivante entre la dérivée classique et la différentiabilité au sens de Gateau.

Théorème 1. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable au sens classique en $x \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $df(x,v)$ existe pour tout $v \in \mathbb{R}$ et l'application $v \mapsto df(x,v)$ est linéaire. Dans ce cas, nous avons $df(x,v) = f'(x)v$ pour tout $v \in \mathbb{R}$.*

Date: 7 avril 2021.

Lorsque l'application $v \mapsto df(x,v)$ est linéaire, c'est-à-dire que $df(x,\alpha v+\beta w) = \alpha df(x,v)+\beta df(x,w)$, alors f est dite **différentiable au sens de Gateau** ou **Gateau différentiable** au point x. Le théorème précédent mentionne simplement que la dérivabilité au sens de Gateau est équivalente à la dérivée classique ! Mais, en ragardant au travers des lunettes de la dérivée au sens de Gateau, cela nous permet d'entrevoir pourquoi on souhaite que la dérivée d'une fonction de plusieurs variables soit une application linéaire : lorsque cette définition est restreinte au cas des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, elle est simplement équivalente à la définition de la dérivée classique ! Donc, tout ce qu'on souhaite faire, c'est de généraliser correctement la dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aux fonctions de plusieurs variables. Cependant, la dérivée de Gateau n'est pas exactement équivalente à la dérivée habituelle dans le contexte des fonctions de plusieurs variables (appelée la dérivée au sens de Fréchet). La bonne définition est celle attribuée à Hadamard, mais qui est équivalente à celle de Gateau lorsqu'on se restreint aux applications linéaires. Ainsi, notre traitement montre quand même d'où provient l'idée de voir la dérivée comme une application linéaire.

1. Dérivées à gauche et à droite

Pour démontrer le théorème principal, nous avons besoin d'introduire les notions de dérivées à gauche et à droite.

Définition 3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et soit $x \in \mathbb{R}$.*

(1) la dérivée à droite de f au point x est la limite suivante, si elle existe :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Dans ce cas, on note $f'_d(x)$ cette limite.

(2) la dérivée à gauche de f au point x est la limite suivante, si elle existe :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Dans ce cas, on note $f'_g(x)$ cette limite.

La dérivée à gauche et à droite ont en fait un lien intime avec la dérivée d'une fonction.

Théorème 2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à valeur réelle et soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable au point x si, et seulement si, $f'_d(x)$ et $f'_g(x)$ existent et $f'_d(x) = f'_g(x)$.*

Démonstration. Il s'agit d'une propriété bien connue des limites : une limite existe si, et seulement si, la limite à droite et la limite à gauche existent. □

La démonstration du théorème est basée sur quelques lemmes.

Lemme 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à valeur réelle et soit $x \in \mathbb{R}$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(1) $f'_d(x)$ existe.

(2) $df(x, v_0)$ existe pour un certain nombre $v_0 > 0$.

(3) $df(x,v)$ existe pour tout nombre $v > 0$.

Si l'un des énoncés est satisfait, alors $df(x,v) = f'_d(x)v$ pour tout $v \geq 0$.

Démonstration. (1) ⇒ (2). Supposons que $f'_d(x)$ existe. Alors, nous avons

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{existe.}$$

De la définition, on obtient que $df(x,1)$ existe. Donc, il suffit de prendre $v_0 = 1$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Supposons que $df(x, v_0)$ existe pour un certain $v_0 > 0$. Par définition, ceci indique que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+v_0h)-f(x)}{h} \quad \text{existe.}$$

On souhaite montrer que, pour tour $v > 0$, $df(x, v)$ existe, c'est-à-dire

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+vh)-f(x)}{h} \quad \text{existe.}$$

Soit $v > 0$ arbitraire. Posons $u := vh/v_0$. Ainsi, nous avons $h \to 0^+$ si, et seulement si, $u \to 0^+$. De plus, $v_0u = vh$. Par conséquent, on obtient

$$\frac{f(x+vh)-f(x)}{h} = \frac{v}{v_0}\frac{f(x+v_0u)-f(x)}{u}$$

Par conséquent, la limite lorsque $h \to 0^+$ du membre de gauche existe si, et seulement si, la limite lorsque $u \to 0^+$ du membre de droite existe. Comme la limite de droite existe, il s'en suite que la limite de gauch aussi et donc que $df(x, v)$ existe.

(3) $\Rightarrow$ (1). Supposons que $df(x, v)$ existe pour tout $v > 0$. En prenant $v = 1$, on trouve que

$$df(x, 1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Ceci montre que la limite définissant $f'_d(x)$ existe.

Enfin, supposons que l'un des énoncé soit satisfait. Ainsi, $df(x, v)$ existe pour tout $v > 0$ et $f'_d(x)$ existe. D'après une remarque en introduction, on sait que $df(x, 0) = 0$ et donc $df(x, 0) = f'_d(x).0$. Soit $v > 0$. En posant $u = vh$ dans la définition de $f'_d(x)$, on obtient

$$f'_d(x) = \lim_{u\to 0^+} \frac{f(x+u)-f(x)}{u} = \lim_{h\to\to 0^+} \frac{f(x+vh)-f(x)}{vh} = \frac{1}{v}df(x, v)$$

où la dernière égalité provient de la définition de $df(x, v)$. Par conséquent, on obtient $df(x, v) = f'_d(x)v$. Avec le cas $v = 0$, on obtient bien l'expression désirée. □

Biensûr, nous avons aussi le lemme similaire pour $f'_g(x)$.

Lemme 2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle et soit $x \in \mathbb{R}$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(1) $f'_g(x)$ existe.

(2) $df(x, v_0)$ existe pour un certain nombre $v_0 < 0$.

(3) $df(x, v)$ existe pour tout nombre $v < 0$.

Si l'un des énoncés est vérifié, alors $df(x, v) = f'_g(x)v$ pour tout $v \leq 0$.

Démonstration. La preuve est très similaire à celle du lemme 2. □

Nous sommes maintenant prêt à démontrer le théorème principal.

Démonstration du théorème 1. Supposons que f soit dérivable en x. Dans ce cas, $f'(x)$ existe. D'après le théorème 2, $f'_d(x)$ et $f'_g(x)$ existent et sont égales. D'après les lemmes 2 et 1, nous avons que $df(x, v)$ existe pour tout $v \in \mathbb{R}$ et

$$df(x, v) = \begin{cases} f'_d(x)v & \text{si } v > 0 \\ f'_g(x)v & \text{si } v < 0 \\ 0 & \text{si } v = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, Comme $f'_d(x) = f'_g(x) = f'(x)$, nous avons en fait que $df(x, v) = f'(x)v$ pour tout $v \in \mathbb{R}$. La fonction $v \mapsto f'(x)v$ est linéaire (c'est une droite). Ceci démontre l'implication direct.

Supposons maintenant que l'application $v \mapsto df(x, v)$ est linéaire. Par conséquent, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tout $v, w \in \mathbb{R}$, nous avons

$$df(x, \alpha v + \beta w) = \alpha df(x, v) + \alpha df(x, w).$$

En prenant $\alpha = \beta = 1$ et $v = 1$ et $w = -1$ dans la précédente identité, nous obtenons

$$df(x, 0) = df(x, 1) + df(x, -1).$$

D'après une remarque faite en introduction, nous avons $df(x, 0) = 0$. En utilisant les lemmes 2 et 1 à nouveau, nous avons que $df(x, v) = f'_d(x)v$ lorsque $v > 0$ et $df(x, v) = f'_g(x)v$ lorsque $v < 0$ où $f'_d(x)$ et $f'_g(x)$ existent. Ainsi, on obtient finalement

$$0 = f'_d(x) - f'_g(x)$$

ce qui fournit $f'_d(x) = f'_g(x)$. D'après le théorème 2, la dérivée $f'(x)$ existe. $\square$

2. Exemple instructif

Soit $f(x) := |x|$ où $|\cdot|$ est la fonction valeur absolue définie par

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Lorsque $x > 0$, un petit calcul de limite fournit

$$df(x, v) = v \quad (v \in \mathbb{R}).$$

Lorsque $x < 0$, un autre petit calcul de limite fournit

$$df(x, v) = -v \quad (v \in \mathbb{R}).$$

Donc, pour chaque $x \neq 0$, la fonction $v \mapsto df(x, v)$ est linéaire (elle est soit v lorsque $x > 0$, soit $-v$ lorsque $x < 0$). D'après le théorème 1, la fonction f est dérivable en $x \neq 0$ avec

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Mais, en $x = 0$, il y a un problème. En effet, si $v > 0$, nous avons

$$df(0, v) = \lim_{h \to 0^+} \frac{hv}{h} = v.$$

Si $v < 0$, alors

$$df(0, v) = \lim_{h \to 0^+} \frac{-hv}{h} = -v.$$

Dans ce cas, nous obtenons

$$df(0, v) = \begin{cases} v & \text{si } v > 0 \\ -v & \text{si } v < 0 \\ 0 & \text{si } v = 0. \end{cases}$$

La fonction $df(0, v)$ n'est pas linéaire. En effet, si $v = 1$ et $w = -1$, on obtient

$$df(0, 0) = 0 \ \text{ mais } \ df(0, 1) + df(0, -1) = 2.$$

Donc, d'après le théorème 1, la fonction f n'est pas dérivable en $x = 0$!

Morale

Bref, nous savons maintenant que la dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle en un point $x \in \mathbb{R}$ est équivalente à la linéarité d'une certaine application (la fonction $v \mapsto df(x, v)$). La morale de l'histoire est donc : un bon point de vue permet de voir pourquoi une certaine définition a été introduite. J'espère que je vous aurez éclairé sur le fait que la dérivée d'une fonction de plusieurs variables est vue comme une application linéaire (matrice) !

Université Laval
Email address: `pierre-olivier.parise.1@ulaval.ca`