Université Laval

Densité de l'algèbre du disque dans les espaces de de Branges–Rovnyak

Examen prédoctoral prospectif

Pierre-Olivier Parisé
Sous la supervision de Thomas J. Ransford

Québec, Canada
1er février 2019

Table des matières

Introduction

Les espaces de de Branges–Rovnyak ont été introduits par de Branges et Rovnyak dans l'annexe de leur article [6] portant sur une formulation de la théorie quantique de la diffusion. Selon ces auteurs, un tel espace est paramétré par une fonction b et il est défini comme l'ensemble $\mathcal{H}(b)$ des fonctions analytiques sur le disque unité $\mathbb{D}$ telles que

$$\|f\|_b^2 := \sup_{g \in H^2} \|g + bg\|_{H^2}^2 - \|g\|_{H^2}^2 < \infty.$$

De Branges a utilisé la théorie des espaces $\mathcal{H}(b)$ développée davantage dans l'ouvrage [5] afin de fournir une première preuve de la conjecture de Bieberbach.

Cependant, le point de vue que nous adoptons dans ce travail est celui exposé dans l'ouvrage de Sarason [17] et qui est décrit dans les deux ouvrages volumineux de Mashreghi et Fricain [12, 13]. Plus précisément, l'espace de de Branges–Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ est défini comme l'image de l'opérateur $\sqrt{I - T_b T_{\overline{b}}} : H^2 \to H^2$ muni d'un produit scalaire qui en fait un sous-espace de Hilbert de H^2. La définition précise de ces espaces est donnée dans la section 2. L'espace $\mathcal{H}(b)$ est invariant par l'adjoint de l'opérateur de décalage $S : H^2 \to H^2$ et, d'une certaine façon, peut être considéré comme un type d'espace modèle [1].

La théorie des espaces de de Branges–Rovnyak se divise en deux cas selon que b est un point extrême ou non-extrême de la boule unité de H^∞, où H^∞ est l'espace des fonctions analytiques bornées sur $\mathbb{D}$. Plusieurs propriétés des espaces $\mathcal{H}(b)$ dépendent de cette dichotomie.

Par exemple, lorsque b est un point non-extrême, $\mathcal{H}(b)$ contient tous les polynômes analytiques sur $\mathbb{D}$ et les fonctions analytiques sur la fermeture de $\mathbb{D}$, noté $\mathrm{Hol}(\mathrm{clos}(\mathbb{D}))$. De plus, Sarason a montré que les polynômes sont denses dans $\mathcal{H}(b)$, mais la preuve ne permet pas de construire les polynômes qui approximent une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$. Récemment, les auteurs de [10] ont démontré qu'il n'est pas possible d'utiliser les techniques usuelles pour approcher une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$. Ils ont construit un exemple d'espace $\mathcal{H}(b)$ et une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$ pour lesquels ni les fonctions dilatées $f_r(z) := f(rz)$, ni les sommes partielles de la série de Taylor de f, ni la moyenne de Cesàro de ces dernières sommes partielles ne convergent dans la norme de $\mathcal{H}(b)$ vers f. Cependant, ils ont développé une autre technique utilisant les opérateurs de Toeplitz afin d'extraire une suite de polynômes explicites qui converge dans la norme de $\mathcal{H}(b)$ vers f. Ces résultats sont énoncés brièvement à la section 3.

Dans le cas où b est un point extrême, la situation change drastiquement. Cette situation est présentée à la section 4. Nous y voyons que l'espace $\mathcal{H}(b)$ contient peu de membres de l'espace $\mathrm{Hol}(\mathrm{clos}(\mathbb{D}))$. Il s'en suit qu'une approximation par des polynômes est généralement impossible. Malgré cette différence importante, Aleman et Malman[2] ont récemment démontré que l'espace $\mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b)$ où $\mathcal{A}$ est l'algèbre du disque est dense dans $\mathcal{H}(b)$. Les mêmes auteurs ont généralisé leur résultat dans l'article [1] pour des espaces de fonctions analytiques définies sur $\mathbb{D}$ à valeurs dans un espace de Hilbert. Toutefois, leur preuve est non-constructive, c'est-à-dire que la méthode ne permet pas d'obtenir les expressions explicites des fonctions qui

1. Voir l'article [14] pour une introduction aux espaces modèles.

approchent une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$. Le problème de thèse tourne alors autour de la question : peut-on donner une preuve constructive du fait que l'espace $\mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b)$ est dense dans l'espace $\mathcal{H}(b)$?

Dans ce contexte, le but de ce document est de présenter la preuve du théorème de Aleman et Malman du cas unidimensionel parue dans leur récent article [1]. Cette démarche nous permettra de mieux comprendre la preuve et, peut-être, d'en extraire une méthode constructive pour la démonstration de la densité de l'espace $\mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b)$.

1 Notions de base

Nous débutons par introduire quelques notions de base sur les espaces de Hardy, les opérateurs de Toeplitz et la transformée de Cauchy. Les preuves des résultats de cette section se retrouvent, entre autres, dans l'ouvrage de Duren[9], le chapitre 17 de l'ouvrage de Rudin[16], l'article de Halmos et al.[15], l'ouvrage de Cima et al.[3] et l'ouvrage de Fricain et Mashreghi[12]. Pour le présent document, nous adoptons les notations suivantes. La lettre m dénote la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité $\mathbb{T}$. Les puissances entières de l'exponentielles complexes $e^{\mathbf{i}\theta}$ sont notées par $\chi_n(\theta) := e^{\mathbf{i}n\theta}$ où n est un entier. L'ensemble des mesures boréliennes à valeurs complexes sur $\mathbb{T}$ est noté $\mathfrak{M}$, et l'ensemble des mesures boréliennes positives finies sur $\mathbb{T}$ est noté $\mathfrak{M}_+$. Puis, l'ensemble des fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$ est noté $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$.

Soit $0 < p < \infty$ un nombre réel. L'**espace de Hardy** H^p est l'ensemble des fonctions $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ telles que $\lim_{r \to 1^-} M_p(r; f) < \infty$ où

$$M_p(r; f) := \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^p \, dm(\zeta).$$

D'une part, l'application $\|\cdot\|_{H^p} : H^p \to [0, \infty)$ définie par $\|f\|_{H^p} := \lim_{r \to 1^-} M_p(r; f)$ est une norme sur H^p lorsque $p \in [1, \infty)$ et $(H^p, \|\cdot\|_{H^p})$ est un espace de Banach. D'autre part, la fonction $d : H^p \times H^p \to [0, \infty)$ définie par $d(f, g) := \|f - g\|_{H^p}^p$ est une métrique sur H^p lorsque $p \in (0, 1)$ et (H^p, d) est un espace de Fréchet. D'ailleurs, pour $p \in (0, \infty)$, nous avons que si $f_n \to f$ dans H^p, alors $f_n \to f$ uniformément sur les sous-ensembles compacts de $\mathbb{D}$. Pour $p < \infty$, nous avons l'estimation utile suivante (voir [9, p.36]) qui permet de démontrer les faits précédents :

$$|f(z)| \leq 2^{1/p} \|f\|_{H^p} \frac{1}{(1 - |z|)^{1/p}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Pour le cas $p = \infty$, l'espace de Hardy H^∞ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $\sup_{0<r<1} M_\infty(r; f) < \infty$ où $M_\infty(r; f) := \sup_{\zeta \in \mathbb{T}} |f(r\zeta)|$. Dans ce cas, $(H^\infty, \|\cdot\|_{H^\infty})$ est l'espace des fonctions analytiques bornées sur $\mathbb{D}$ et il constitue un espace de Banach.

Chaque fonction $f \in H^p$ possède des limites radiales presque partout, c'est-à-dire que $f^*(\zeta) := \lim_{r \to 1^-} f(r\zeta)$ existe pour presque tout $\zeta \in \mathbb{T}$. La fonction f^* est aussi notée f et nous avons que $f \in L^p := L^p(\mathbb{T}, m)$. Dans ce qui suit, $\mathcal{P}_+$ est l'ensemble des polynômes trigonométriques de la forme $\sum_{n \geq 0} c_n \chi_n$ et $\|f\|_p^p$ est l'intégrale de $|f|^p$ selon la mesure de

Lebesgue. Aussi, une fonction f est une **fonction intérieure** si $f \in H^\infty$ et $|f| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$. Une **fonction extérieure** f est une fonction de la forme

$$f(z) = \lambda \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log \varphi(\zeta)\, dm(\zeta)\right),$$

où $\lambda \in \mathbb{T}$, $\varphi \geq 0$ sur $\mathbb{T}$ et $\log \varphi \in L^1$.

Théorème 1.1. *Soit $0 < p \leq \infty$ et $f \in H^p$.*

1. *Si $p < \infty$, alors $\lim_{r\to 1^-} \|f_r - f\|_p^p = 0$ où $f_r(\zeta) := f(r\zeta)$ pour $\zeta \in \mathbb{T}$. De plus,*
$$\|f\|_{H^p} = \|f\|_p.$$
2. *Si $p \geq 1$ et $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, alors $a_n = \hat{f}(n)$ où $\hat{f}(n)$ est le coefficient de Fourier de $f \in L^p$. De plus,*
$$H^p = \left\{ f \in L^p \,:\, \hat{f}(n) = 0 \quad \forall n < 0 \right\}.$$
3. *Si $p < \infty$, alors l'espace des polynômes $\mathcal{P}_+$ est dense dans H^p.*
4. *$f = f_i f_o$ où f_i est une fonction intérieure et $f_o \in H^p$ est une fonction extérieure.*
5. *Si $p \leq q$, alors $H^q \subset H^p$.*

Le deuxième énoncé de ce théorème permet de définir deux sous-espaces de L^p lorsque $p \geq 1$. Tout d'abord, le premier sous-espace est défini comme $H_0^p := \{f \in H^p \,:\, f(0) = 0\}$. Il s'agit de l'espace des fonctions $f \in H^p$ qui s'annule en $z = 0$. Puis, le deuxième sous-espace est noté $\overline{H}^p$. Il s'agit de l'ensemble des fonctions de la forme $\overline{f}$ où $f \in H^p$ et $\overline{z} := \operatorname{Re} z - \mathbf{i}\operatorname{Im} z$ est le complexe conjugué d'un nombre complexe z. La fermeture d'un espace M est notée $\operatorname{clos}(M)$ pour éviter la confusion avec le complexe conjugué. Notons que $H^p \cap \overline{H}^p = \{\lambda \,:\, \lambda \in \mathbb{C}\}$ et que $L^p = H^p \oplus \overline{H_0}^p$. À quelques reprises durant ce travail, nous rencontrerons la classe des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ appelée la **classe de Smirnov**. Celle-ci est définie comme l'ensemble des fonctions $f = \frac{g}{u}$ où $g \in H^\infty$ et u est une fonction extérieure. Cette classe de fonctions est notée N^+. Un théorème dû à Smirnov indique que si $f \in N^+$ et que $f \in L^p$ pour un certain $p > 0$, alors $f \in H^p$.

Le cas $p = 2$ fournit un espace de Hilbert, appelé l'espace de Hardy. Pour $w \in \mathbb{D}$, la fonctionnelle linéaire d'évaluation sur H^2 définie par $f \mapsto f(w)$ est continue et, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une fonction $k_w \in H^2$ telle que $f(w) = \langle f, k_w\rangle_2$ où $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ est le produit scalaire habituel sur L^2. Les fonctions k_w sont appelées les **noyaux de Szegő-Cauchy** de H^2 et elles sont de la forme $k_w(z) = \frac{1}{1-\overline{w}z}$.

Le deuxième point du théorème 1.1 permet de définir la **projection de Riesz** $P_+ : L^2 \to H^2$. Il s'agit de la projection orthogonale de L^2 sur H^2, c'est-à-dire, $P_+(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\chi_n) = \sum_{n\geq 0} c_n\chi_n$. L'**opérateur de Toeplitz** $T_\varphi : H^2 \to H^2$ où $\varphi \in L^\infty$ est défini par l'expression $T_\varphi(f) := P_+(\varphi f)$. Les principales propriétés des opérateurs de Toeplitz sont recensées dans le théorème suivant.

Théorème 1.2. *Soit $\varphi, \psi \in L^\infty$.*

1. $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$, $T_{\overline{\varphi}} = T_\varphi^*$ *et* $T_{\overline{\varphi}} k_w = \overline{\varphi(w)} k_w$ *pour* $w \in \mathbb{D}$.
2. *Si* $\varphi \in H^\infty$ *ou* $\psi \in H^\infty$, *alors* $T_{\overline{\psi}} T_\varphi = T_{\overline{\psi}\varphi}$.
3. $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$ *si et seulement si* $\varphi, \psi \in H^\infty$ *ou* $\overline{\varphi}, \overline{\psi} \in H^\infty$.

On dénote par $S := T_{\chi_1}$ comme l'opérateur de décalage. Il est aussi défini par l'expression $Sf(z) := zf(z)$. Son adjoint S^* est l'opérateur $T_{\chi_{-1}}$ et il s'écrit aussi comme $S^*f(z) := \frac{f(z)-f(0)}{z}$.

Nous terminons cette section en introduisant la **transformée de Cauchy** d'une mesure $\mu \in \mathfrak{M}$. Pour chaque $z \in \mathbb{D}$, on définit la transformée de Cauchy $C_\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ d'une mesure $\mu \in \mathfrak{M}$ par l'expression

$$C_\mu(z) := \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{1 - \overline{\zeta} z}.$$

Si $\mathfrak{K} := \{f = C_\mu \, : \, \mu \in \mathfrak{M}\}$ et $\mathfrak{K}$ est muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire habituelles sur l'ensemble des fonctions, alors il est un espace vectoriel. Si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m, alors $d\mu = f\,dm$ pour une certaine fonction $f \in L^1$. Dans ce cas, on écrit C_f au lieu de C_μ.

Théorème 1.3. *Soit $\mu \in \mathfrak{M}$.*

1. *Si* $z \in \mathbb{D}$, *alors* $C_\mu(z) = \sum_{n \geq 0} \hat{\mu}(n) z^n$ *où* $\hat{\mu}(n) := \int_{\mathbb{T}} \chi_{-n}\, d\mu$.
2. $\mathfrak{K} \subset \bigcap_{0<p<1} H^p$.
3. *Si* $d\mu = f\,dm$ *où* $f \in L^2$, *alors* $C_f = P_+(f)$.

2 Espaces de de Branges–Rovnyak

Dans cette section, nous explorons les propriétés de base des espaces de de Branges–Rovnyak. En particulier, nous introduisons la définition des espaces de de Branges–Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ comme l'image d'un certain opérateur.

2.1 Images d'opérateurs et espaces de Hilbert

Soient $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ et $(\mathcal{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_1})$ deux espaces de Hilbert. L'ensemble des opérateurs bornés $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}$ est noté par $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H})$ et il est doté de la norme d'opérateur habituelle $\|\cdot\|$. On note par A^* l'adjoint de A et il faut noter que $A^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$. Si $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, alors le spectre d'un opérateur borné A est noté par $\sigma(A)$. Pour les propriétés de base et théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle, le lecteur peut consulter l'ouvrage de Conway[4].

Soit un opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H})$. L'image de cet opérateur est notée $\operatorname{ran} A$ et son noyau $\ker A$. Nous notons aussi l'image de A par $\mathcal{M}(A)$ lorsque celle-ci est munie de la structure d'espace de Hilbert que nous définissons maintenant. Nous introduisons un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}(A)}$ sur $\mathcal{M}(A)$ par la formule suivante :

$$\langle Ax, Ay \rangle_{\mathcal{M}(A)} := \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_1} \qquad \text{pour } x, y \in (\ker A)^{\perp}.$$

Il faut remarquer que si $x \in \ker A$ ou (exclusif) $y \in \ker A$, alors $\langle Ax, Ay \rangle_{\mathcal{M}(A)} = 0 = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_1}$ et la définition de ce nouveau produit scalaire a du sens dans ce contexte.

La prochaine proposition fait intervenir les notions suivantes. On dit qu'un sous-espace de Hilbert $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}})$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est **inclusivement borné** à l'intérieur de $\mathcal{H}$ si l'injection $i : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ est bornée. Si c'est le cas, on note $\mathcal{M} \Subset \mathcal{H}$. Si l'injection $i : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ est une contraction, alors on dit que $\mathcal{M}$ est **inclusivement « contractible »** dans $\mathcal{H}$ et on note $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{H}$. Enfin, si $\|i(x)\|_{\mathcal{H}} = \|x\|_{\mathcal{M}}$, alors $\mathcal{M}$ est **isométriquement inclus** dans $\mathcal{H}$. S'il s'avère que $\mathcal{M} = \mathcal{H}$ et $\mathcal{M}$ est isométrique à $\mathcal{H}$, alors on note cela par $\mathcal{M} \doteq \mathcal{H}$.

Proposition 2.1. *Soit $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}$ et $B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}$ deux opérateurs bornés.*

1. *$(\mathcal{M}(A), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}(A)})$ est un espace de Hilbert, $\mathcal{M}(A) \Subset \mathcal{H}$ et A^* est une isomérie de $\mathcal{M}(A)$ dans $\mathcal{H}_1$.*
2. *Si $y \in \mathcal{H}$ et $\langle \cdot, y \rangle_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}^*$, alors $\langle \cdot, y \rangle_{\mathcal{H}}$ restreinte à $\mathcal{M}(A)$ appartient à $(\mathcal{M}(A))^*$ et cette fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{M}(A)$ est induite par AA^*y.*
3. *$\mathcal{M}(A) \hookrightarrow \mathcal{M}(B)$ si et seulement si $AA^* \leq BB^*$.*
4. *$\mathcal{M}(A) \doteq \mathcal{M}(B)$ si et seulement si $AA^* = BB^*$. En particulier, $\mathcal{M}(A) \doteq \mathcal{M}((AA^*)^{1/2})$.*
5. *$\mathcal{M}(A) \doteq \mathcal{M}$ où $\mathcal{M}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ si et seulement si A est une isométrie partielle de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}$. Dans ce cas, nous avons que $\mathcal{M}(A) \doteq \mathcal{M}(AA^*)$.*

Démonstration. Nous allons seulement démontrer le deuxième point de cette proposition. Les preuves des autres points se trouvent aux [17, chapitre 1] ou [13, chapitre 16]. Comme $\mathcal{M}(A) \Subset \mathcal{H}$, alors il existe une constante $c \geq 0$ telle que $\|i(Ax)\|_{\mathcal{H}} = \|Ax\|_{\mathcal{H}} \leq c\|Ax\|_{\mathcal{M}(A)}$. Alors, pour chaque $Ax \in \mathcal{M}(A)$, puisque $\langle \cdot, y \rangle_{\mathcal{H}}$ appartient à $\mathcal{H}^*$, nous avons que

$$|\langle Ax, y \rangle| \leq \|y\|_{\mathcal{H}}\|Ax\|_{\mathcal{H}} \leq c\|y\|_{\mathcal{H}}\|Ax\|_{\mathcal{M}(A)}.$$

Donc, $\langle \cdot, y \rangle_{\mathcal{H}}|_{\mathcal{M}(A)}$ est une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{M}(A)$. De plus, pour chaque $Ax \in \mathcal{M}(A)$, nous avons que

$$\langle Ax, y \rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, A^*y \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle Ax, AA^*y \rangle_{\mathcal{M}(A)}$$

où la dernière égalité provient du fait que $A^*y \in \operatorname{ran} A^* \subset (\ker A)^{\perp}$. □

Supposons que l'opérateur borné A est une contraction de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}$. D'une part, l'**espace complémentaire** de $\mathcal{M}(A)$ est l'espace $\mathcal{H}(A) := \mathcal{M}(D_A)$ où $D_A := (I_{\mathcal{H}} - AA^*)^{1/2}$. Il faut remarquer que $\mathcal{H}(A) \subset \mathcal{H}$. D'autre part, $\mathcal{H}(A^*)$ est défini de manière similaire en interchangeant les rôles de A et A^*. Dans ce cas, nous avons plutôt que $\mathcal{H}(A^*) \subset \mathcal{H}_1$. La prochaine proposition donne deux relations importantes entre $\mathcal{H}(A)$ et $\mathcal{H}(A^*)$.

Proposition 2.2. *Soit $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}$ une contraction.*

1. *Soit $x \in \mathcal{H}$. Le vecteur $x \in \mathcal{H}(A)$ si et seulement si le vecteur $A^*x \in \mathcal{H}(A^*)$. Dans ce cas, nous avons que*

$$\langle x_1, x_2 \rangle_{\mathcal{H}(A)} = \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathcal{H}} + \langle A^*x_1, A^*x_2 \rangle_{\mathcal{H}(A^*)} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{H}(A).$$

2. *$\mathcal{M}(A) \cap \mathcal{H}(A) = A\mathcal{H}(A^*)$.*
3. *Si A est une isométrie partielle de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}$, alors $\mathcal{H}(A)$ est le complément orthogonal de $\mathcal{M}(A)$ dans $\mathcal{H}$.*

2.2 Définition et propriétés de base

Les propositions énoncées dans la sous-section précédente nous permettent d'introduire les espaces de de Branges–Rovnyak. Soit $b \in H^\infty$ une fonction holomorphe bornée non-constante [2] sur $\mathbb{D}$ et supposons que $\|b\|_\infty \leq 1$. Alors, l'opérateur de Toeplitz $T_b : H^2 \to H^2$ est une contraction et l'opérateur borné D_{T_b} est bien défini. L'espace de Hilbert associé à T_b est l'espace $\mathcal{M}(T_b) := \mathcal{M}(b)$ muni du produit scalaire défini comme à la section précédente. L'**espace de de Branges–Rovnyak** associé à la fonction b est l'espace $\mathcal{H}(b) := \mathcal{H}(D_{T_b})$ muni du produit scalaire

$$\langle D_{T_b} f, D_{T_b} g \rangle_b := \langle D_{T_b} f, D_{T_b} g \rangle_{\mathcal{H}(D_{T_b})} = \langle f, g \rangle_2 \quad \forall f, g \in (\ker D_{T_b})^\perp.$$

Il est bien d'observer que $f \in \ker D_{T_b}$ si et seulement si $f \in \ker(I - T_b T_{\overline{b}})$. En effet, si $f \in \ker D_{T_b}$, alors $(I - T_b T_{\overline{b}})f = 0$. Réciproquement, si $f \in \ker(I - T_b T_{\overline{b}})$, alors

$$\|D_{T_b} f\|_2^2 = \langle D_{T_b} f, D_{T_b} f \rangle_2 = \langle (I - T_b T_{\overline{b}}) f, f \rangle_2 = 0.$$

Théorème 2.1. *Soit $b \in H^\infty$ telle que $\|b\|_\infty \leq 1$. Soit $w \in \mathbb{D}$.*

1. *$\mathcal{M}(b) \Subset H^2$ et $\mathcal{H}(b) \Subset H^2$.*
2. *La fonction $k_w \in (\ker D_{T_b})^\perp$.*
3. *La fonctionnelle d'évaluation $\phi_w : \mathcal{H}(b) \to \mathbb{C}$ est continue.*
4. *Si $k_w^b \in \mathcal{H}(b)$ tel que $f(w) = \left\langle f, k_w^b \right\rangle_b$ pour toute $f \in \mathcal{H}(b)$, alors $k_w^b = (1 - \overline{b(w)} b) k_w$ et*

$$\|k_w^b\|_b^2 = \frac{1 - |b(w)|^2}{1 - |w|^2}. \tag{1}$$

5. *$\mathcal{M}(b) \doteq M$ où M est un sous-espace fermé de H^2 si et seulement si b est une fonction intérieure. Dans ce cas, $\mathcal{M}(b) = bH^2$.*

Démonstration. Soient $\|b\|_\infty \leq 1$ et $w \in \mathbb{D}$.

2. Pour le restant du document, il est sous-entendu que b est une fonction non-constante, à moins d'indication contraire.

1. Ceci est une application directe du premier point de la proposition 2.1.
2. Supposons que $(I - T_b T_{\overline{b}})k_w = 0$. Comme $T_{\overline{b}} k_w = \overline{b(w)} k_w$, nous trouvons que

$$0 = (I - T_b T_{\overline{b}})k_w = (I - \overline{b(w)} b)k_w$$

ce qui implique que $\overline{b(w)} b = 1$. Ainsi, on en déduit que $\overline{b(w)} \neq 0$ et donc que $b = \frac{1}{\overline{b(w)}}$ sur $\mathbb{D}$, une fonction constante. Or, d'après notre hypothèse, b est non-constante. Ainsi, $k_w \in (\ker D_{T_b})^{\perp}$.
3. D'après la propriété du noyau reproduisant k_w de H^2 et le fait que $\mathcal{H}(b) \Subset H^2$, nous avons que si $f \in \mathcal{H}(b)$, alors, pour une certaine constante $c > 0$,

$$|\phi_w(f)| = |f(w)| = |\langle f, k_w \rangle_2| \leq \|k_w\|_2 \|f\|_2 \leq c \|k_w\|_2 \|f\|_b.$$

4. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe $k_w^b \in \mathcal{H}(b)$ telle que $\phi_w(f) = \left\langle f, k_w^b \right\rangle_b$ pour toute $f \in \mathcal{H}(b)$. Supposons que $f \in \mathcal{H}(b)$ et $f = D_{T_b} f_1$ avec $f_1 \in H^2$. Ainsi, nous pouvons calculer

$$\left\langle f, k_w^b \right\rangle_b = f(w) = \langle f, k_w \rangle_2 = \langle f_1, D_{T_b} k_w \rangle_2 = \langle f, (I - T_b T_{\overline{b}})k_w \rangle_b .$$

Par conséquent, $k_w^b = (I - T_b T_{\overline{b}})k_w$. Enfin, par la propriété de k_w^b, nous avons que

$$\|k_w^b\|_b^2 = \left\langle k_w^b, k_w^b \right\rangle_b = \frac{1 - |b(w)|^2}{1 - |w|^2}.$$

5. D'après le dernier point de la proposition 2.1, $\mathcal{M}(b) \doteq M$, où M est un sous-espace fermé de H^2, est équivalent à ce que T_b soit une isométrie partielle sur H^2. Or, l'opérateur T_b est injectif lorsque $b \in H^\infty$. Ainsi, T_b devrait être une isométrie sur H^2. Or, selon le corollaire 3 de l'article [15], ceci se produit si et seulement si b est une fonction intérieure. □

Le troisième point de ce théorème nous permet d'affirmer que $\mathcal{H}(b)$ est un espace de Hilbert à noyau reproduisant dont les noyaux reproduisants sont k_w^b avec $w \in \mathbb{D}$. D'ailleurs, le dernier point du théorème jumelé au dernier point de la proposition 2.2 permettent de conclure que si b est intérieure, alors $\mathcal{H}(b) = H^2 \ominus bH^2 = K_b$, l'espace modèle pour l'opérateur S^* sur H^2. Le prochain théorème est une conséquence de la propositions 2.1 et 2.2. Il permet de faire un lien entre $\mathcal{H}(b)$ et $\mathcal{H}(\overline{b})$.

Théorème 2.2. *Soit $b \in H^\infty$ telle que $\|b\|_\infty \leq 1$.*

1. $\mathcal{M}(b) \hookrightarrow \mathcal{M}(\overline{b})$ *et* $\mathcal{H}(\overline{b}) \hookrightarrow \mathcal{H}(b)$.
2. *Soit $h \in H^2$. Alors, $h \in \mathcal{H}(b)$ si et seulement si $T_{\overline{b}} h \in \mathcal{H}(\overline{b})$. Dans ce cas, quelles que soient $h_1, h_2 \in \mathcal{H}(b)$, nous avons que*

$$\langle h_1, h_2 \rangle_b = \langle h_1, h_2 \rangle_2 + \langle T_{\overline{b}} h_1, T_{\overline{b}} h_2 \rangle_{\overline{b}} .$$

3. $\mathcal{M}(b) \cap \mathcal{H}(b) = T_b\mathcal{H}(\bar{b})$.

Démonstration. Les deux derniers points du théorème proviennent de la proposition 2.2. Pour le premier point, il suffit de remarquer que si $f \in H^2$, alors

$$\langle T_b T_{\bar{b}} f, f\rangle_2 = \langle T_{\bar{b}} f, T_{\bar{b}} f\rangle_2 = \|P_+(\bar{b}f)\|_2^2 \leq \|\bar{b}f\|_2^2 = \langle T_{\bar{b}} T_b f, f\rangle_2 . \square$$

Nous disons qu'un espace de Hilbert de fonctions analytiques $\mathcal{H}$ est **invariant** par un opérateur A si $A\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$. Un **multiplicateur** pour l'espace $\mathcal{H}$ est une fonction $\varphi \in H^\infty$ telle que $\mathcal{H}$ est invariant par T_φ. On note $M_\varphi := T_\varphi|_{\mathcal{H}(b)}$ lorsque φ est un multiplicateur de $\mathcal{H}(b)$.

Théorème 2.3. *Soient $b \in H^\infty$ telle que $\|b\|_\infty \leq 1$ et $\varphi \in H^\infty$.*

1. *$\mathcal{H}(b)$ et $\mathcal{H}(\bar{b})$ sont invariants par l'opérateur $T_{\overline{\varphi}}$. De plus, nous avons que*

$$\|T_{\overline{\varphi}}\|_{\mathcal{H}(b)\to\mathcal{H}(b)} \leq \|\varphi\|_\infty \ \text{et} \quad \|T_{\overline{\varphi}}\|_{\mathcal{H}(\bar{b})\to\mathcal{H}(\bar{b})} \leq \|\varphi\|_\infty.$$

2. *Tout multiplicateur de $\mathcal{H}(b)$ est un multiplicateur de $\mathcal{H}(\bar{b})$.*
3. *Si φ est un multiplicateur pour $\mathcal{H}(b)$, alors $M_\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(b))$ et*

$$M_\varphi^* k_w^b = \overline{\varphi(w)} k_w^b.$$

Réciproquement, si $M \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(b))$ et si tout k_w^b est vecteur propre de M^*, alors $M = M_\varphi$ pour un multiplicateur $\varphi \in \mathcal{H}(b)$.

Démonstration. Le preuve du premier point se trouve au paragraphe II-7 dans le livre [17]. Pour les points deux et trois, les preuves se trouvent au paragraphe II-10 de l'op. cit. □

Un cas particulier du premier point du théorème 2.3 est celui où $\varphi = \chi_1$ puisque $T_{\chi_1} = S$. Ainsi, nous obtenons que $\mathcal{H}(b)$ et $\mathcal{H}(\bar{b})$ sont invariants par l'opérateur $S^* = T_{\overline{\chi_1}}$. La restriction de S^* à l'espace $\mathcal{H}(b)$ est notée X.

Jusqu'à présent, nous avons vu que les fonctions k_w^b appartiennent à l'espace $\mathcal{H}(b)$. Il est possible d'obtenir d'autres exemples explicites de fonctions appartenant à $\mathcal{H}(b)$. Nous nous en tiendrons à l'exemple suivant.

Exemple 2.1. Lorsque $b \in H^\infty$ et $\|b\|_\infty \leq 1$, alors $S^*b \in \mathcal{H}(b)$. En effet, $S^*b \in \mathcal{H}(b)$ si et seulement si $T_{\bar{b}}S^*b \in \mathcal{H}(\bar{b})$ d'après le théorème 2.2. Comme $\mathcal{H}(\bar{b})$ est invariant par S^*, nous avons que

$$T_{\bar{b}}S^*b = -S^*(I - T_{\bar{b}}T_b)k_0 = -S^*k_0^{\bar{b}} \in \mathcal{H}(\bar{b}).$$

Cet exemple nous assure que $S^*b \in \mathcal{H}(b)$. Ceci nous permet de représenter l'adjoint de l'opérateur $X \in \mathcal{H}(b)$. L'espression de X^* est donnée par (voir II-9 de [17])

$$X^*h = Sh - \langle h, S^*b\rangle_b \, b \quad \forall h \in \mathcal{H}(b).$$

3 Espace de de Branges–Rovnyak : Cas non-extrême

Soit $b \in H^\infty$ et $\|b\|_\infty \leq 1$. On peut montrer [9, Chapitre 7] que b est un **point extrême** de la boule unité de H^∞ si et seulement si

$$\int_{\mathbb{T}} \log(1 - |b|^2)\, dm = -\infty.$$

Cette section-ci concerne le cas où b est non-extrême.

3.1 Densité des polynômes

Lorsque b est un point non-extrême de la boule unité de H^∞, alors $\log(1 - |b|^2) \in L^1$. Il existe donc une fonction $a \in L^1$ telle que a est extérieure, $a(0) > 0$ et $|a|^2 + |b|^2 = 1$ sur $\mathbb{T}$. On dit que (b, a) est une **paire**. Cette relation entre a et b s'avère très utile puisque $\mathcal{M}(\overline{a})$ est plus simple à traiter que $\mathcal{H}(b)$.

Théorème 3.1. *Soit $b \in H^\infty$ un point non-extrême de la boule unité de H^∞ et (b, a) une paire.*

1. *$\mathcal{M}(\overline{a}) \doteq \mathcal{H}(\overline{b})$.*
2. *Une fonction $h \in H^2$ appartient à $\mathcal{H}(b)$ si et seulement si $T_{\overline{a}}h \in \mathcal{M}(\overline{a})$. Dans ce cas, il existe une unique fonction $h^+ \in H^2$ telle que $T_{\overline{a}}h^+ = T_{\overline{b}}h$ et*
$$\|h\|_b^2 = \|h\|_2^2 + \|h^+\|_2^2.$$
3. *Si $\varphi \in H^\infty$, alors $(T_{\overline{\varphi}}h)^+ = T_{\overline{\varphi}}h^+$.*
4. *L'espace des polynômes $\mathcal{P}_+$ est dense dans $\mathcal{M}(\overline{a})$.*
5. *$\mathcal{M}(\overline{a})$ est dense dans $\mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. Nous démontrons seulement le dernier point du théorème. Supposons que $h \in \mathcal{H}(b)$ et $h \perp \mathcal{M}(\overline{a})$ relativement au produit scalaire de $\mathcal{H}(b)$. D'après le théorème 2.3, $\mathcal{H}(\overline{b})$ est invariant sous S^{*n} pour tout entier $n \geq 0$. Par conséquent, nous avons que $S^{*n}T_{\overline{a}}h = T_{\overline{a}}S^{*n}h \in \mathcal{M}(\overline{a})$ quel que soit l'entier $n \geq 0$.

Soit $h^+ \in H^2$ l'unique fonction telle que $T_{\overline{a}}h^+ = T_{\overline{b}}h$ et $n \geq 0$ un entier. Une application successive du point 3 du théorème fournit la relation

$$(S^{*n}T_{\overline{a}}h)^+ = S^{*n}T_{\overline{a}}h^+.$$

Ainsi, comme $S^{*n}T_{\overline{a}}h \in \mathcal{M}(\overline{a})$, il s'en suit que

$$\begin{aligned} 0 = \langle h, S^{*n}T_{\overline{a}}h\rangle_b &= \langle h, S^{*n}T_{\overline{a}}h\rangle_2 + \left\langle h^+, S^{*n}T_{\overline{a}}h^+\right\rangle_2 \\ &= \left\langle a|h|^2, \chi_{-n}\right\rangle_2 + \left\langle a|h^+|^2, \chi_{-n}\right\rangle_2 = \left\langle a(|h|^2 + |h^+|^2), \chi_{-n}\right\rangle_2. \end{aligned}$$

Ainsi, les coefficients de Fourier associés à une valeur $-n \leq 0$ de la fonction $a(|h|^2 + |h^+|^2)$ sont nuls. Il s'en suit que $a(|h|^2 + |h^+|^2) \in H_0^1$. Cependant, a est une fonction extérieure et $a(0) > 0$. Ainsi, d'après le théorème de Smirnov, on en conclut que $|h|^2 + |h^+|^2 \in H_0^1$. Ceci implique que $|h|^2 + |h^+|^2 = 0$ p.p., c'est-à-dire que $h = h^+ = 0$. □

La démonstration précédente est une preuve qu'on juge non-constructive. Il s'avère qu'il est possible, dans le cas où b est non-extrême, de fournir une preuve constructive du fait que le sous-espace des polynômes $\mathcal{P}_+$ est dense dans $\mathcal{H}(b)$. Pour ce faire, il faut passer par une autre méthode d'approximation.

3.2 Théorème d'approximation de Toeplitz

Nous nous intéressons maintenant à un théorème général d'approximation d'une fonction appartement à $\mathcal{H}(b)$ à partir d'opérateurs de Toeplitz. Ce résultat a été démontré dans l'article [11]. Nous présentons la démonstration de ce résultat pour $\mathcal{H}(\bar{b})$ puisque le résultat pour $\mathcal{H}(b)$ se déduit de ce dernier.

Théorème 3.2. *Soit $(\varphi_n) \subset H^\infty$ telle que $\|\varphi_n\|_\infty \leq 1$ pour tout entier $n \geq 1$ et $\varphi_n(0) \to 1$ lorsque $n \to \infty$. Si $b \in H^\infty$ appartient à la boule unité de H^∞ et $f \in \mathcal{H}(\bar{b})$, alors $T_{\overline{\varphi}_n} f \in \mathcal{H}(\bar{b})$ pour tout entier $n \geq 1$ et*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_{\overline{\varphi}_n} - f\|_{\bar{b}} = 0.$$

Pour la démonstration de ce résultat, il faut introduire une isométrie entre $\mathcal{H}(\bar{b})$ et l'espace $H^2(\rho)$ où $\rho := 1 - |b|^2$. L'espace $L^2(\rho)$ est l'espace des fonctions mesurables $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ telles que la quantité $\|f\|_\rho := \int_\mathbb{T} |f|\rho\, dm$ est finie. Le produit scalaire sur $L^2(\rho)$ est noté par $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$. L'espace $H^2(\rho)$ est la fermeture des polynômes $\mathcal{P}_+$ selon $L^2(\rho)$. Remarquons que $H^2, H^\infty \subset H^2(\rho)$ et que comme $\mathcal{P}_+ \subset H^\infty$, alors H^∞ est dense dans $H^2(\rho)$. D'ailleurs, nous notons par $J_\rho : H^2 \to H^2(\rho)$ l'injection de H^2 dans $H^2(\rho)$.

Si $q \in L^2(\rho)$, alors nous remarquons que $q\rho = q\rho^{1/2}\rho^{1/2}$ où $q\rho^{1/2} \in L^2$. Ainsi, nous avons que $q\rho \in L^2$. Nous introduisons l'opérateur $K_\rho : L^2(\rho) \to H^2$ par $K_\rho q := C_{q\rho} = P_+(\rho q)$ où $C_{q\rho}$ est la transformée de Cauchy de $f\rho\, dm$. Du point de vue de la projection P_+, il est plus simple de voir que K_ρ est un opérateur borné de $(L^2(\rho), \|\cdot\|_\rho)$ dans l'espace H^2. En fait, K_ρ est une isométrie surjective de $H^2(\rho)$ sur $\mathcal{H}(\bar{b})$.

Théorème 3.3. *Soit $b \in H^\infty$ et $\|b\|_\infty \leq 1$.*

1. *K_ρ est une isométrie surjective de $H^2(\rho)$ dans $\mathcal{H}(\bar{b})$ et $\ker K_\rho = (H^2(\rho))^\perp$.*
2. *L'adjoint de $K_\rho \in \mathcal{B}(H^2(\rho), H^2)$ est J_ρ et $K_\rho J_\rho = T_\rho$.*
3. *Si $\varphi \in H^\infty$ et $L_\varphi : H^2(\rho) \to H^2(\rho)$ est l'opérateur de multiplication par φ, alors*

$$\|L_\varphi\|_{H^2(\rho)\to H^2(\rho)} \leq \|\varphi\|_\infty \quad \text{et} \quad L_\varphi J_\rho = J_\rho T_\varphi.$$

Démonstration. Les démonstrations des deux premiers points se trouvent au paragraphe III-3 de [17]. Nous montrons le troisième point. Supposons que $\varphi \in H^\infty$. Il est clair que $\|L_\varphi f\|_\rho \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_\rho$ quel que soit $f \in H^2(\rho)$. Si $f \in H^2$, alors $\varphi f \in H^2$, ce qui implique que $J_\rho(\varphi f) = \varphi f$. Dans ce cas, nous obtenons l'égalité suivante :

$$L_\varphi J_\rho f = \varphi f = J(\varphi f) = J_\rho T_\varphi f. \; \square$$

Démonstration du théorème 3.2. Soit $f \in \mathcal{H}(\bar{b})$. D'après le théorème 3.3, il existe $q \in H^2(\rho)$ telle que $K_\rho q = f$ et $\|q\|_\rho = \|f\|_{\bar{b}}$. De plus, d'après le théorème 2.3, $T_{\overline{\varphi}_n} f \in \mathcal{H}(\bar{b})$ pour tout entier $n \geq 1$.

Puis, d'après le théorème 3.3, nous avons aussi que $L_{\varphi_n} J_\rho = J_\rho T_{\varphi_n}$ et en y appliquant l'adjoint, on obtient que $K_\rho L_{\varphi_n}^* = T_{\overline{\varphi}_n} K_\rho$ sur $H^2(\rho)$. Comme K_ρ est une isométrie de $H^2(\rho)$ vers $\mathcal{H}(\bar{b})$, nous avons que

$$\|T_{\overline{\varphi}_n} f - f\|_{\bar{b}} = \|L_{\varphi_n}^* q - q\|_\rho.$$

Il suffit maintenant de montrer que cette dernière quantité tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Comme H^∞ est dense dans $H^2(\rho)$, on suppose que $q \in H^\infty$. Nous avons que

$$\begin{aligned}
\|L_{\varphi_n}^* q - q\|_\rho^2 &= \|L_{\varphi_n}^* q\|_\rho^2 + \|q\|_\rho^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle q, L_{\varphi_n} q\rangle_\rho \\
&\leq 2\|q\|_\rho - 2\mathrm{Re}\int_{\mathbb{T}} |q|^2 \overline{\varphi}_n \rho\, dm \\
&= 2\int_{\mathbb{T}} |q|^2 (1 - \mathrm{Re}\,\varphi_n)\rho\, dm \leq 2\|q\rho^{1/2}\|_\infty^2 (1 - \mathrm{Re}\,\varphi_n(0)).
\end{aligned}$$
□

À l'aide de la proposition 2.2 et du théorème 3.2, on déduit un théorème d'approximation par des opérateurs de Toeplitz dans le cadre de $\mathcal{H}(b)$.

Théorème 3.4. *Soit $(\varphi_n) \subset H^\infty$ telle que $\|\varphi_n\|_\infty \leq \infty$ et $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(0) = 1$. Si $b \in H^\infty$ avec $\|b\|_\infty \leq 1$ et si $f \in \mathcal{H}(b)$, alors $T_{\overline{\varphi}_n} f \in \mathcal{H}(b)$ quel que soit l'entier $n \geq 1$ et $\lim_{n\to\infty} \|T_{\overline{\varphi}_n} f - f\|_b = 0$.*

Démonstration. Voir le théorème 5.1 de l'article [11]. □

Grâce à ce dernier théorème, les auteurs de [11] ont donné une démonstration constructive du fait que les polynômes forment un sous-espace dense de $\mathcal{H}(b)$ (voir le [11, théorème 4.4]). En effet, les auteurs ont eu recours à cette approche puisque, dans le cas où b est non-extrême, ni l'approximation d'une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$ par ces dilatations f_r, ni l'approximation par les sommes partielles du polynôme de Taylor ou les moyennes de Cesàro ne fonctionnent.

Un exemple d'un espace $\mathcal{H}(b)$ où b est de type non-extrême est construit comme suit. Soit $b_0 = \frac{\tau z}{1-\tau^2 z}$ et $a_0 = \frac{\tau(1-z)}{1-\tau^2 z}$ où $\tau = (\sqrt{5}-1)/2$. Alors (b_0, a_0) forme une paire et il a été démontré dans [18] que $\lim_{r\to 1^-} \|f_r - f\|_{b_0} = 0$. Cependant, cette propriété n'est pas vérifiée pour $b = b_0 B^2$ où B est un produit de Blaschke dont les zéros sont aux points $w_n = 1 - 4^{-n}$. Dans ce cas, $\lim_{r\to 1^-} \|(f_r)^+\|_2 = +\infty$ et $\lim_{r\to 1^-} \|f_r\|_b = +\infty$. Ces résultats sont contenus dans la section 3 de l'article [11]. La situation pour le cas extrême est très différente : l'approximation par des polynômes est parfois impossible.

4 Espaces de de Branges–Rovnyak : cas extrême

Pour cette section, nous supposons que b est un point extrême de la boule unité de H^∞. Ainsi, nous avons dans ce cas que

$$\int_{\mathbb{T}} \log(1 - |b|^2)\, dm = -\infty.$$

D'après le [12, corollaire 8.23], nous avons que $H^2(\rho) = L^2(\rho)$ et l'isométrie $K_\rho : H^2(\rho) \to \mathcal{H}(\bar{b})$ est maintenant unitaire.

4.1 Fonctions analytiques sur le cercle unité

Il y a un fait surprenant qui survient pour le cas où b est extrême. Pour $\mathcal{H}(\bar{b})$, nous avons le théorème suivant.

Théorème 4.1. *Soit $b \in H^\infty$ un point extrême de la boule unité de H^∞. Alors $\mathcal{H}(\bar{b}) \cap \mathrm{Hol}(\mathrm{clos}(\mathbb{D})) = \{0\}$.*

Une fonction $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ appartient à l'espace $\mathrm{Hol}(\mathrm{clos}(\mathbb{D}))$ si f est analytique sur un voisinage de $\mathbb{D}$. Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin d'un résultat sur la croissance des coefficients de Taylor des fonctions de l'espace $\mathrm{Hol}(\mathrm{clos}(\mathbb{D}))$.

Théorème 4.2. *Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique telle que les limites radiales de f existent presque partout.*

1. *$f \in \mathrm{Hol}(\mathrm{clos}(\mathbb{D}))$ si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que $\hat{f}(n) = O(e^{-cn})$ lorsque $n \to \infty$.*
2. *Si $g \in L^1(\mathbb{T})$ telle que **(i)** $\hat{g}(-n) = O(e^{-cn})$ pour $n \to \infty$ et **(ii)** $\log|g| \notin L^1$, alors $g = 0$ p.p.*

Démonstration. Voir les théorèmes 5.7 et 4.31 de [12] respectivement. □

Démonstration du théorème 4.1. Supposons que $h \in \mathcal{H}(\bar{b}) \cap \mathrm{Hol}(\mathrm{clos}(\mathbb{D}))$. D'après le théorème 3.3, il existe une fonction $q \in H^2(\rho)$ telle que $K_\rho(q) = h$ et donc par le théorème 1.3, $P_+(\rho q) = h$. De plus, comme b est un point extrême, il s'en suit que $\log|\rho q| \notin L^1$. En effet, ceci provient de l'inégalité suivante

$$|\log|\rho q|| \geq \log^-|\rho q| \geq -\log|\rho^{1/2} q| - \frac{1}{2}\log\rho \geq \frac{1}{2}\left(1 - |\rho^{1/2} q|^2 - \log\rho\right),$$

où $\log^- x := \max\{0, -\log x\}$.

Par le théorème 4.2, nous avons que $\hat{h}(n) = O(e^{-cn})$ lorsque $n \to \infty$ pour une certaine constante $c > 0$. Posons $w = \overline{\rho q}$ où $\rho q \in L^2$. Nous avons que $\widehat{\rho q}(n) = \hat{h}(n)$ pour $n \geq 0$ puisque $P_+(\rho q) = h$. Il s'en suit que pour $n \geq 0$,

$$\hat{w}(-n) = \int_{\mathbb{T}} w \chi_n \, dm = \overline{\int_{\mathbb{T}} \overline{w} \chi_{-n} \, dm} = \overline{\widehat{\rho q}(n)} = \overline{\hat{h}(n)}.$$

Comme $\hat{h}(n) = O(e^{-cn})$ lorsque $n \to \infty$, alors $\hat{w}(-n) = O(e^{-cn})$ lorsque $n \to \infty$. De plus, nous avons remarqué que $\log|\rho q| \notin L^1$. Par conséquent, d'après le théorème 4.2, on en déduit que $\rho q = 0$. Par conséquent, $h = P_+(\rho q) = 0$. □

Les fonctions de l'espace $\mathrm{Hol}(\mathrm{clos}(\mathbb{D}))\cap\mathcal{H}(b)$ ont aussi une caractérisation. Pour démontrer cette caractérisation, la notion de **vecteur cyclique** de l'opérateur S^* sur H^2 est définie. Une fonction $f \in H^2$ est cyclique pour S^* si et seulement si span $\{S^{*n}f \,:\, n \geq 0\}$ est dense dans H^2. Le prochain théorème provient de [7], mais davantage de détails se trouvent dans [8].

Théorème 4.3 (Thm. 2.2.4 [8])**.** *Soit $f \in \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$. Alors, seulement l'une des deux situations suivantes peut se produire :*

1. *f est cyclique pour S^*.*
2. *f est une fonction rationnelle (un vecteur non-cyclique de S^*).*

Théorème 4.4. *Soit b un point extrême de la boule unité de H^∞. Si $h \in \mathcal{H}(b)\cap\mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$, alors h est une fonction rationnelle appartenant à $\ker T_{\bar{b}}$.*

Démonstration. Supposons que $h \in \mathcal{H}(b)\cap\mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$. Alors, d'une part, il existe une constante $c > 0$ telle que $\hat{h}(n) = O(e^{-cn})$ lorsque $n \to \infty$. D'autre part, nous avons que $T_{\bar{b}}h \in \mathcal{H}(\bar{b})$. Nous allons montrer que $\widehat{T_{\bar{b}}h}(n) = O(e^{-cn})$ lorsque $n \to \infty$. Nous avons

$$\langle T_{\bar{b}}h, \chi_n\rangle_2 = \langle T_{\bar{b}}h, S^n\chi_0\rangle_2 = \langle S^{*n}h, T_b\chi_0\rangle_2 = \sum_{k\geq n}\hat{h}(k)\hat{b}(k)$$

et par conséquent, comme $|\hat{b}(k)| \leq \|b\|_\infty$, nous obtenons que

$$\left|\langle T_{\bar{b}}h, \chi_n\rangle_2\right| \leq \sum_{k\geq n} e^{-ck} = \frac{e^{-cn}}{1-e^{-c}}.$$

D'après le théorème 4.2, on en déduit que $T_{\bar{b}}h \in \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$ et donc d'après le théorème 4.1, $T_{\bar{b}}h = 0$. Autrement dit, $h \in \ker T_{\bar{b}}$.

Il reste maintenant à démontrer que h est une fonction rationnelle. Un petit calcul fournit que $\ker T_{\bar{b}} = \ker T_{\bar{b}_i}$ où b_i est le facteur intérieur de b. Un petit calcul fournit aussi que $\ker T_{\bar{b}_i} = K_{b_i} := H^2 \ominus b_iH^2$ un sous-espace fermé et invariant pour l'opérateur S^*. Ainsi, h n'est pas cyclique pour S^*. D'après le théorème précédent, h doit être une fonction rationnelle. □

Ce dernier théorème élimine toute espoir d'obtenir une approximation polynômiale d'une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$. Par exemple, si b est une fonction extérieure, alors $\ker T_{\bar{b}} = \{0\}$. Le prochain théorème indique sous quelle condition l'espace des polynômes appartient à $\mathcal{H}(b)$.

Théorème 4.5. *Soit $b \in H^\infty$ telle que $\|b\|_\infty \leq 1$. Alors $\mathcal{P}_+ \subset \mathcal{H}(b)$ si et seulement si b est non-extrême.*

Démonstration. Supposons que b est non-extrême. Soit a l'unique fonction extérieure telle que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ sur $\mathbb{T}$ et $a(0) > 0$. Soit $p = \sum_{m=0}^{n} c_m\chi_m$ un polynôme de degré n. Il suffit de vérifier que $T_{\bar{a}}p$ est un polynôme du même degré. Si $k > n$, nous avons que

$$\langle T_{\bar{a}}p, \chi_k\rangle_2 = \langle p, a\chi_k\rangle_2 = \sum_{m\geq k}\hat{p}(m)\hat{a}(m) = 0.$$

Donc, $T_{\overline{a}}p$ est un polynôme de degré plus petit ou égal à n. Maintenant, vérifions que son degré est exactement n. Il suffit de vérifier cela pour les polynômes χ_n. Si $T_{\overline{a}}\chi_n$ a un degré strictement plus petit que n, alors

$$0 = \langle T_{\overline{a}}\chi_n, \chi_n \rangle_2 = \langle \chi_0, a \rangle_2 = a(0).$$

Ceci est une contradiction avec le fait que $a(0) > 0$. Donc, $T_{\overline{a}}p$ est un polynôme dont le degré est exactement n.

Supposons que $\mathcal{P}_+ \subset \mathcal{H}(b)$, mais que b est extrême. Dans ce cas, d'après le théorème 4.4, $\mathcal{P}_+ \subset \ker T_{\overline{b}}$. Par conséquent, $\chi_n \in \ker T_{\overline{b}}$ pour chaque entier $n \geq 0$. Soit $k \geq 0$ un entier. Alors,

$$0 = \langle T_{\overline{b}}\chi_n, \chi_k \rangle_2 = \langle \chi_{n-k}, b \rangle_2 = \overline{\hat{b}(n-k)}.$$

Comme n et k sont arbitraires, on trouve que $b = 0$ identiquement. Une contradiction. □

Du dernier théorème, on peut remarquer que $\chi_n \in \mathcal{H}(b)$ si et seulement si b a un zéro d'ordre $n+1$ en $z = 0$. Ces derniers résultats nous poussent donc à penser à un autre espace de fonctions afin d'approcher les éléments de $\mathcal{H}(b)$.

4.2 Densité de $\mathcal{H}(\overline{b})$

Nous avons vu à la sous-section 3 que l'espace $\mathcal{M}(\overline{a}) \doteq \mathcal{H}(\overline{b})$ et que $\mathcal{M}(\overline{a})$ est dense dans $\mathcal{H}(b)$ lorsque b est non-extrême. La tentation est forte de vérifier si c'est aussi le cas lorsque b est extrême et ainsi proposer comme candidat le sous-espace $\mathcal{H}(\overline{b})$ pour approcher les fonctions de $\mathcal{H}(b)$. Le prochain théorème brime aussi cet autre espoir.

Théorème 4.6. *Soit $b \in H^\infty$ un point extrême et $b = b_i b_o$ où b_i est une fonction intérieure et b_o est une fonction extérieure.*

1. *$\mathcal{H}(b) = \mathcal{H}(b_o) \oplus b_o\mathcal{H}(b_i)$. De plus, $\mathcal{H}(b_o) \hookrightarrow \mathcal{H}(b)$ et $T_{b_o} : \mathcal{H}(b_i) \to \mathcal{H}(b)$ est une contraction.*
2. *La fermeture de $\mathcal{H}(\overline{b})$ dans $\mathcal{H}(b)$ est $\mathcal{H}(b_o)$.*

Démonstration. Voir les sections 4 et 5 du chapitre 5 de [17]. □

Donc, il faut déterminer un autre candidat pour le problème de densité dans l'espace $\mathcal{H}(b)$.

4.3 Densité de l'algèbre du disque

Aleman et Malman ont réussi à trouver un tel espace. Ils ont démontré dans [2] que l'espace $\mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b)$ est dense dans $\mathcal{H}(b)$ où $\mathcal{A}$ est l'algèbre du disque. Ils ont ensuite généralisé leur théorème à des espaces de fonctions holomorphes invariants par l'adjoint de l'opérateur de décalage, soit S^*. Dans cette sous-section, nous allons réécrire la preuve de la densité de l'algèbre du disque parue dans [1] pour l'espace $\mathcal{H}(b)$ lorsque b est un point extrême. Leur preuve fait appel à l'espace $\mathrm{clos}(\Delta H^2)$, où $\Delta := \sqrt{1-|b|^2}$ et la fermeture est dans l'espace L^2. Le but de cette sous-section est de démontrer le théorème suivant. À moins d'indication contraire, la fonction b est un point extrême ou non-extrême de la boule unité de H^∞.

Théorème 4.7. *Soit b un point extrême. Alors l'espace $\mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b)$ est dense dans l'espace $\mathcal{H}(b)$.*

Plusieurs outils sont nécessaires afin de faire la preuve de ce théorème. Le premier outil est une isométrie que nous obtenons entre l'espace $\mathcal{H}(b)$ et un sous-espace fermé de $K := H^2 \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$. L'espace vectoriel $H^2 \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$ est muni du produit scalaire

$$\langle f_1 \oplus g_1, f_2 \oplus g_2 \rangle_{H^2 \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)} := \langle f_1, f_2 \rangle_2 + \langle g_1, g_2 \rangle_2 .$$

Théorème 4.8. *Soit $b \in H^\infty$ telle que $\|b\|_\infty \leq 1$.*

1. *Une fonction $h \in H^2$ appartient à $\mathcal{H}(b)$ si et seulement si il existe une unique fonction $k \in \mathrm{clos}(\Delta H^2)$ telle que*

$$P_+(\bar{b}h) + P_+(\Delta k) = 0.$$

   De plus, il existe une isométrie $J : \mathcal{H}(b) \to H^2 \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$ telle que $Jh = h \oplus k$.

2. *Le complément orthogonal de $J(\mathcal{H}(b))$ comme sous-espace fermé de $H^2 \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$ est*

$$(J(\mathcal{H}(b)))^\perp = \left\{ bf \oplus \Delta f \ : \ f \in H^2 \right\}.$$

Démonstration. Tout d'abord, il faut noter que l'espace $U := \{bf \oplus \Delta f \ : \ f \in H^2\}$ est un sous-espace fermé de K. En effet, il suffit de remarquer que l'application de $H^2 \to H^2 \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$ définie par $f \mapsto bf \oplus \Delta f$ est une isométrie.

1. Notons par $P_1 : H^2 \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2) \to H^2$ la projection sur la première coordonnée. Nous montrons que P_1 est injectif sur $U^\perp$. Supposons que $(h, k) \in \ker P_1 \cap U^\perp$. Dans ce cas, on a évidemment que $h = 0$. Cependant, $(0, k) \perp U$ et donc $k \perp \Delta f$ pour toute fonction $f \in H^2$. Or, nous savons que $k \in \mathrm{clos}(\Delta H^2)$ et ceci implique que $k = 0$. Posons maintenant l'espace $\mathcal{H} := P_1 U^\perp$ muni de la norme $\|h\|_{\mathcal{H}}^2 := \|h\|_2^2 + \|k\|_2^2 = \|P_1^{-1} h\|_K^2$ où $h \in \mathcal{H}$. Autrement dit, $\mathcal{H} = \mathcal{M}(P_1|_{U^\perp})$. Il s'agit d'un espace de Hilbert de fonctions analytiques dont les fonctionnelles linéaires sont bornées. Il s'ensuit que $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert à noyau reproduisant. Nous allons montrer que $\mathcal{H} \doteq \mathcal{H}(b)$ en montrant que le noyau reproduisant de $\mathcal{H}$ est le même que celui de $\mathcal{H}(b)$. Posons, pour $w \in \mathbb{D}$,

$$h_w \oplus l_w := \left((1 - \overline{b(w)} b) k_w \right) \oplus (-\overline{b(w)} \Delta k_w).$$

   Alors, nous avons $h_w \oplus l_w \in U^\perp$ puisqu'un petit calcul fournit

$$P_+(\bar{b} h_w) + P_+(\sqrt{1-|b|^2} l_w) = 0.$$

Puis, si $f \oplus g \in U^\perp$, alors le calcul suivant

$$\begin{aligned}\langle f, h_w\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle (f\oplus g), (h_w \oplus l_w)\rangle_K \\ &= \langle (f\oplus g), (k_w \oplus 0)\rangle_K - b(w)\left\langle (f\oplus g), (bk_w \oplus \sqrt{1-|b|^2}k_w)\right\rangle_K \\ &= \langle f, k_w\rangle_2 \\ &= f(w)\end{aligned}$$

permet de conclure que le noyau reproduisant de $\mathcal{H}$ est h_w. Il est clair que $h_w = k_w^b$ où k_w^b est le noyau reproduisant pour $\mathcal{H}(b)$. Par conséquent, nous obtenons que $\mathcal{H}(b) = \mathcal{H}$ et $\|h\|_{\mathcal{H}(b)} = \|h\|_{\mathcal{H}}$.
Soit $h \in \mathcal{H}(b)$. Alors, il existe une unique fonction $k \in \operatorname{clos}(\Delta H^2)$ telle que $P_1(h\oplus k) = h$ et $h \oplus k \in U^\perp$. Ainsi, pour chaque fonction $f \in H^2$, nous avons que

$$0 = \int_{\mathbb{T}} h\overline{bf}\, dm + \int_{\mathbb{T}} k\Delta\overline{f}\, dm = \left\langle \bar{b}h + \Delta k, f\right\rangle_2 \tag{2}$$

et donc $\bar{b}f + \Delta k \in \overline{H_0}^2$. Réciproquement, supposons que $h\oplus k \in H^2 \oplus \operatorname{clos}(\Delta H^2)$ remplit la condition $P_+(\bar{b}h + \Delta k) = 0$. Alors, $\bar{b}h + \Delta k \in \overline{H_0}^2$. Autrement dit, $h \oplus k \in U^\perp$ par l'équation (2). Ainsi, $P_1 h = h \in \mathcal{H} = \mathcal{H}(b)$. On obtient bien le résultat de ce premier point. L'isométrie recherchée est $J := P_1^{-1}\Big|_{U^\perp}$ puique $\|h\|_{\mathcal{H}} = \|P^{-1}h\|_K$.

2. Nous avons noté que U est un sous-espace fermé de K et d'après le premier point $J(\mathcal{H}(b)) = U^\perp$ Il s'en suit que $(J(\mathcal{H}(b)))^\perp = U$. □

Cette isométrie sera utilisée plus tard pour la démonstration de la densité de $\mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b)$ dans $\mathcal{H}(b)$.

Afin de poursuivre notre cheminement, nous introduisons des concepts supplémentaires concernant la transformée de Cauchy d'une mesure $\mu \in \mathfrak{M}$ et les éléments de l'algèbre du disque. On munit $\mathcal{C}$ de la norme quotient, c'est-à-dire

$$\|f\|_{\mathcal{C}} := \inf\{\|\mu\| \,:\, f = C_\mu\}, \quad f \in \mathcal{C}.$$

Théorème 4.9. *Soit* $\mathcal{A} := \operatorname{Hol}(\overline{\mathbb{D}}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ *et* $\mathcal{C}$ *l'espace des transformées de Cauchy.*

1. $(\mathcal{A})^* = \mathcal{C}$ *et la dualité est réalisée par le jumelage*

$$\langle s, f\rangle = \int_{\mathbb{T}} s\, d\overline{\mu}, \quad s \in \mathcal{A} \text{ et } f = C_\mu \in \mathcal{C}.$$

2. *Si* $p \in (0,1)$, *alors il existe une constante* $c_p \geq 0$ *telle que* $\|f\|_p \leq c_p\|f\|_{\mathcal{C}}$.
3. $(f_n) \subset \mathcal{C}$ *converge faiblement-∗ vers une fonction* $f \in \mathcal{C}$ *si et seulement si* $f_n(z) \to f(z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{D}$ *et* $(\|f_n\|_{\mathcal{C}})$ *est bornée.*

Démonstration. Pour le premier énoncé, voir les pages 83-84 du chapitre 4 de l'ouvrage [3]. Quant au deuxième énoncé, il s'agit du théorème démontré par Smirnov et présenté à la page 43 du livre [3]. Enfin, le troisième énoncé correspond au théorème 4.2.5 du même ouvrage. □

Le prochain ingrédient dans la preuve de Aleman et Malman est la caractérisation de la fermeture faible-$*$ d'un ensemble qui appartient à $\mathcal{C} \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$. Afin d'obtenir cette caractérisation, il faut les résultats suivants.

Théorème 4.10. *Soit B un espace de Banach et $S \subset B^*$. Si $l \in B^*$ et $l\left(\cap_{s\in S} \ker s\right) = 0$, alors l appartient à la fermeture faible-$*$ de S dans B^*.*

Théorème 4.11. *Soit $(f_j) \subset H^\infty$ telle que $\sup_j \|f_j\|_\infty < \infty$ et f_j converge uniformément sur les ensembles compacts de $\mathbb{D}$ vers une fonction f. Si $(g_j) \subset L^2$ converge vers une fonction g en L^2, alors $(f_j g_j)$ converge faiblement-$*$ dans L^2 vers la fonction fg.*

Théorème 4.12. *Soit $(f_n) \subset \mathcal{C}$ qui converge faiblement-$*$ vers une fonction f. Alors il existe une sous-suite (f_{n_k}) et des fonctions extérieures $M_k : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ telles que*

1. $\|M_k\|_\infty \leq 1$.
2. *M_k converge uniformément sur les ensembles compacts de $\mathbb{D}$ vers une fonction extérieure non-nulle M.*
3. *$M_k f_{n_k} \in H^2$ pour tout entier $k \geq 1$.*
4. *la suite $(M_k f_{n_k})$ converges faiblement vers la fonction $Mf \in H^2$.*

Démonstration. Voir le [1, lemme 3.3]. □

Théorème 4.13. *Soit $S \subset \mathcal{C} \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$ un sous-espace vectoriel de la forme*

$$S := \left\{ bf \oplus \Delta f \;:\; f \in N^+ \right\},$$

où N^+ est la classe de Smirnov. Dans ce cas, S est fermé dans $\mathcal{C} \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$ selon la topologie faible-$*$.

Démonstration. Comme $\mathcal{C} \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$ est séparable, d'après le théorème de Krein-Smulian, il suffit de démontrer que S est séquentiellement faiblement-$*$ fermé. Soit $(bf_n \oplus \Delta f_n)_{n\geq 1} \subset S$ qui converge faiblement-$*$ vers $v \oplus u$ dans $\mathcal{C} \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$. En particulier, la suite $(bf_n) \subset \mathcal{C}$ converge faiblement-$*$ vers v et la suite (Δf_n) converge faiblement-$*$ vers u.

D'une part, un exercice simple montre qu'il existe une sous-suite $(\Delta f_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que les moyennes de Cesàro (σ_k) définies par $\sigma_k := \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \Delta f_{n_i}$ convergent en norme L^2 vers la fonction u et $(\sigma_k)_{k\geq 1}$ converge aussi vers u faiblement dans L^2. Ainsi, quitte à passer à la moyenne de Cesàro, on peut supposer que la suite (Δf_n) converge en norme L^2 vers la fonction u. En particulier, nous avons que $\sup_{n\geq 1} \|\Delta f_n\|_2 < +\infty$.

Ensuite, d'après le théorème 4.12, comme (bf_n) converge faiblement-$*$ vers la fonction v, il existe une sous-suite $(bf_{n_k})_{k\geq 1}$ et une suite de fonctions extérieures $(M_k)_{k\geq 1}$ avec les propriétés du théorème. De plus, d'après le théorème 4.11, nous avons que la suite $(\Delta f_{n_k} M_k)_{k\geq 1}$ converge faiblement vers la fonction Mu dans L^2. Par conséquent, ces dernières affirmations impliquent que $(bf_{n_k} M_k \oplus \Delta f_{n_k} M_k)_{k\geq 1}$ converge faiblement dans l'espace $H^2 \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$ vers la fonction $Mv \oplus Mu$.

D'après le théorème 4.12, nous avons que $bf_{n_k}M_k \in H^2$ et $\|M_k\|_\infty \leq 1$. Ceci implique que

$$\|f_{n_k}M_k\|_2^2 = \|bf_{n_k}M_k\|_2^2 + \|\Delta f_{n_k}M_k\|_2^2 < \infty.$$

Comme $f_{n_k}M_k \in N^+$ pour tout $k \geq 1$, d'après le théorème de Smirnov, nous obtenons que $f_{n_k}M_k \in H^2$ pour tout entier $k \geq 1$. Il s'en suit que $bf_{n_k}M_k \oplus \Delta f_{n_k}M_k \in U$ quel que soit l'entier $k \geq 1$. Or, U est un sous-espace vectoriel fermé de $H^2 \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$. Il est donc aussi faiblement fermé dans $H^2 \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$. Nous avons $Mv \oplus Mu \in U$ et il existe une fonction $f \in H^2$ telle que $Mv \oplus Mu = bf \oplus \Delta f$. Par conséquent, comme $f/M \in N^+$, on peut conclure que $v \oplus u = b\frac{f}{M} \oplus \Delta\frac{f}{M} \in S$. □

Une petite remarque s'impose pour bien comprendre la nature de ce résultat. Nous avons vu que l'espace $U = \{bf \oplus \Delta f \,:\, f \in H^2\}$ est un sous-espace fermé de $K = H^2 \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$ et donc un sous-espace fermé selon la topologie faible dans $H^2 \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$. Toutefois, les membres appartenant à U peuvent être vus comme des fonctionnelles linéaires sur $\mathcal{A} \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$ en les identifiant chacun à un couple de la forme $bf\, dm \oplus \Delta f \in \mathcal{C} \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$. Ces fonctionnelles linéaires agissent de la façon suivante sur $\mathcal{A} \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$:

$$l_f(u \oplus v) := \int_{\mathbb{T}} u\overline{bf}\, dm + \int_{\mathbb{T}} v\Delta\overline{f}\, dm, \quad u \oplus v \in \mathcal{A} \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2).$$

Dans ce contexte, l'espace U vu comme un sous-espace de $\mathcal{C} \oplus \mathrm{clos}(\Delta f)$ n'est pas fermé selon la topologie faible-$*$. Il est alors légitime de savoir quelle est la fermeture faible-$*$ de U dans $\mathcal{C} \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$. Le théorème précédent répond que la fermeture faible-$*$ de U est contenue dans l'espace S puisque $U \subset S$.

Le prochain lemme est un résultat qui indique que l'espace $J(\mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b))$ est fermé dans $\mathcal{A} \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$, où $J : \mathcal{H}(b) \to H^2 \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$ est l'isométrie du théorème 4.8 et $\mathcal{A}$ est munie de sa topologie uniforme. En fait, le lemme donne une caractérisation exacte de $J(\mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b))$.

Lemme 4.1. *Supposons que pour chaque $f \in H^2$, $l_f := bf \oplus \Delta f$ est identifiée comme un élément de $\mathcal{C} \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$. Alors, nous avons que*

$$J(\mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b)) = \cap_{f \in H^2} l_f.$$

Démonstration. D'une part, supposons que $h \in \mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b)$. Alors d'après le théorème 4.8, nous avons que $Jh \perp U$, c'est-à-dire que

$$\langle Jh, bf \oplus \Delta f \rangle_{H^2 \oplus L^2(E)} = 0, \quad \forall f \in H^2.$$

Donc, $Jh \in \ker l_f$ pour toute $f \in H^2$ et nous avons bien que $J(\mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b) \subset \cap_{f \in H^2} \ker l_f$.

D'autre part, supposons que $h \oplus k \in \cap_{f \in H^2} \ker l_f$. Il faut noter que $\ker l_f \subset \mathcal{A} \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$. Ceci implique que $h \oplus k \in \mathcal{A} \oplus \mathrm{clos}(\Delta H^2)$. Maintenant, par le fait que $h \oplus k \in \ker l_f$ pour toute fonction $f \in H^2$, nous en déduisons que

$$0 = l_f(h \oplus k) = \int_{\mathbb{T}} h\overline{bf}\, dm + \int_{\mathbb{T}} k\Delta\overline{f}\, dm$$

et donc que $h \oplus f \perp U$. Or, d'après le théorème 4.8, ceci implique que $h \oplus k \in J(\mathcal{H}(b))$. Donc, nous trouvons bien que $h \oplus k \in J(\mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b))$ puisque $h \in \mathcal{A}$. □

Tous les outils sont maintenant à notre disposition pour démontrer le théorème 4.7.

Démonstration du théorème 4.7. Supposons que $b \in H^\infty$ est un point extrême de la boule unité de H^∞. Dans ce cas, nous devons remarquer que $\operatorname{clos}(\Delta H^2) = H^2(\rho)$ est un sous-espace invariant et fermé de l'opérateur de décalage S sur $L^2(\rho)$. Comme b est un point extrême, d'après le [12, corollaire 8.23], nous avons l'égalité $H^2(\rho) = L^2(\rho)$. Or, d'après le [12, théorème 8.29], les seuls sous-espaces invariants de l'opérateur de décalage sur $L^2(\rho)$ sont de la forme $L^2(E)$ où E est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{T}$. Soit $J : \mathcal{H}(b) \to H^2 \oplus L^2(E)$ l'isométrie du théorème 4.8 où $Jh = (h, k)$, $k \in L^2(E)$ est l'unique solution qui satisfait

$$P_+(\bar{b}h) + P_+(\sqrt{1-|b|^2}k) = 0$$

et $(J(\mathcal{H}(b)))^\perp = U$.

Supposons que $h \in \mathcal{H}(b)$ soit perpendiculaire à $\mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b)$ selon le produit scalaire de $\mathcal{H}(b)$. Le couple Jh vu comme un élément de $\mathcal{C} \oplus L^2(E)$ annule $J(\mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b))$. En effet, pour chaque $h' \in \mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b)$, nous avons que $Jh' = h' \oplus k'$ pour une unique $k' \in L^2(E)$ et

$$Jh(Jh') = \int_{\mathbb{T}} h'\overline{h}\, dm + \int_{\mathbb{T}} k'\overline{k}\, dm = \langle Jh', Jh \rangle_{H^2 \oplus L^2(E)} = \langle h', h \rangle_b .$$

Comme $h \perp \mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b)$, nous devons avoir que $\langle h', h \rangle_b = 0$.

D'après le théorème 4.10 combiné au lemme 4.1, il s'en suit que Jh est dans la fermeture faible-$*$ de l'ensemble des fonctionnelles identifié à U. Or, d'après le théorème 4.13, la fermeture faible-$*$ de U dans $\mathcal{C} \oplus L^2(E)$ est incluse dans S. Par conséquent, $Jh = bf \oplus \Delta f$ pour une fonction $f \in N^+$. Nous avons que

$$\|f\|_2^2 = \|bf\|_2^2 + \|\Delta f\|_2^2 = \langle Jh, Jh \rangle_{H^2 \oplus L^2(E)} = \|h\|_b^2 < \infty.$$

D'après le théorème de Smirnov, nous déduisons que $f \in H^2$. Donc, $Jh \in U$. Toutefois, le théorème 4.8 signale que $Jh \perp U$. Nous concluons donc que $Jh = 0$, c'est-à-dire que $h = 0$ puisque J est injective. □

Ce résultat constitue un grand pas en avant pour la théorie des espaces de de Branges–Rovnyak et l'approximation des éléments de ces espaces. Il implique que si $f \in \mathcal{H}(b)$, alors il existe une suite $(f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b)$ telle que $f_n \to f$ dans la norme de l'espace $\mathcal{H}(b)$. Par contre, comme le lecteur peut le constater, la preuve qui a été présentée ne donne aucune information sur la forme des fonctions f_n. Il demeure encore ouvert de trouver une technique qui permette d'expliciter la forme des fonctions f_n et ainsi établir une preuve constructive de la densité de l'espace $\mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b)$ dans l'espace $\mathcal{H}(b)$. Le problème de thèse tourne essentiellement autour de cette question.

Conclusion

Dans ce travail, la définition et les propriétés des espaces de de Branges–Rovnyak ont été introduites. Nous avons étudié la densité de certains sous-espaces de $\mathcal{H}(b)$ et nous y avons décelé différents résultats dépendant de la nature de la fonction b. Dans le cas où b est non-extrême, les polynômes sont denses dans l'espace $\mathcal{H}(b)$. Dans le cas extrême, la situation est totalement différente et une approximation polynômiale est impossible. Par contre, le sous-espace $\mathcal{A} \cap \mathcal{H}(b)$ est dense quel que soit la fonction b. Suite à cet avancement majeur de Aleman et Malman, plusieurs questions s'imposent.

Est-il possible de remplacer l'algèbre du disque par un autre sous-espace de fonctions dans l'énoncé du théorème ? Un premier exemple qui vient en tête est l'algèbre de Wiener A^+. Cet ensemble est constitué des fonctions analytiques sur le disque telles que les coefficients de Taylor sont sommables. Plus précisément,

$$A^+ := \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \, : \, f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ et } \sum_{n \geq 0} |a_n| < \infty \right\}.$$

Nous avons bien sûr que $A^+ \subset A$ et $\mathrm{Hol}(\mathrm{clos}(\mathbb{D})) \subset A^+$. La dernière inclusion est stricte. Le dual de A^+ est simple à identifier lorsque nous remarquons que A^+ est isomorphe à ℓ^1. De ce point de vue, le dual est l'espace ℓ^∞ des suites bornées de nombres complexes. Malheureusement, cette identification ne permet pas nécessairement d'adapter la preuve de Aleman et Malman dans le contexte de l'algèbre de Wiener. On peut alors poser une autre question.

Est-il possible d'identifier le dual de l'algèbre de Wiener avec un sous-espace de mesures ? Si une telle identification est possible, alors nous pourrions voir si la preuve d'Aleman et Malman s'adapte à l'algèbre de Wiener. L'auteur a pensé à une méthodologie pour y arriver. Celle-ci consiste d'abord à trouver l'identification entre le dual de A^+ et un sous-espace de $\mathcal{C}$. Ensuite, à vérifier si cet espace est dense dans $\mathcal{C}$ selon la tolopogie faible-$*$ sur $\mathcal{C}$. Ainsi, un argument typique de limite peut nous aider à conclure.

Il y a bien sûr plusieurs sujets et détails qui n'ont pas été mentionnés dans ce travail. Par exemple, les mesures de Clark n'ont pas été mentionnées ici. Il s'agit de représenter la fonction $\frac{1+b}{1-b}$ comme une intégrale de Herglotz contre une mesure positive μ sur $\mathbb{T}$. La mesure μ est alors une mesure de Clark. Dans ce contexte, il est possible de construire une isométrie entre $H^2(\mu)$ et $\mathcal{H}(b)$. Pour davantage de détails, le chapitre 3 de l'ouvrage de Sarason [17] traite de ces propriétés. Voir aussi les paragraphes 8 et 9 des chapitres 4 et 5 respectivement du même ouvrage. Un autre sujet qui n'a pas été traité est le modèle de Sz.-Nagy-Foias pour l'opérateur X. En construisant ce modèle, on y trouve une autre manière d'établir une isométrie de $\mathcal{H}(b)$ dans $H^2 \oplus H^2$ similaire à celle du théorème 4.8. Le lecteur est invité à consulter le paragraphe 7 du chapitre 4 et le paragraphe 6 du chapitre 5 du livre [17]. Un autre champ d'étude qui n'a pas été traité est l'existence de dérivées angulaires de la fonction b. Ce sujet est abordé dans le chapitre 6 de l'ouvrage précédemment cité. Il permet d'obtenir des propriétés analytiques de la fonction b, notamment d'obtenir une caractérisation des points fixes de b.

Références

[1] A. Aleman and B. Malman. Hilbert spaces of analytic functions with a contractive backward shift. *J. Funct. Anal.* 2018. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2018.08.019.

[2] A. Aleman and B. Malman. Density of disk algebra functions in de Branges–Rovnyak spaces. *Comptes Rendus Mathématique*, 355(8) :871–875, 8 2017.

[3] J. A. Cima, A. L. Matheson, and W. T. Ross. *The Cauchy transform*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, Providence, R.I, 2006.

[4] J.B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1994.

[5] L. de Branges. *Square Summable Power Series*. Holt-Rinehart and Winston, 1966.

[6] L. de Branges and J. Rovnyak. Canonical models in quantum scattering theory. *Proc. Adv. Sem. Math. Res. Center, U.S. Army, Theoret. Chem. Inst.*, pages 295–392, 1966.

[7] R. G. Douglas, H. S. Shapiro, and A. L. Shields. On cyclic vectors of the backward shift. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73(1) :156–159, 1967.

[8] R. G. Douglas, H. S. Shapiro, and A. L. Shields. Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator. *Annales de l'Institut Fourier*, 20(1) :37–76, 1970.

[9] P. L. Duren. *Theory of H^p Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York and London, 1970.

[10] O. El-Fallah, E. Fricain, K. Kellay, J. Mashreghi, and T. Ransford. Constructive spproximation in de Branges–Rovnyak spaces. *Constructive Approximation*, 44(2) :269–281, Oct 2016.

[11] O. El-Fallah, K. Kellay, J. Mashreghi, and T. Ransford. *A Primer on the Dirichlet Space*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2014.

[12] E. Fricain and J. Mashreghi. *The Theory of H(b) Spaces*, volume 1 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, 2016.

[13] E. Fricain and J. Mashreghi. *The Theory of H(b) Spaces*, volume 2 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, 2016.

[14] S. R. Garcia and W. T. Ross. Model spaces : a survey, 2013. En ligne : https://arxiv.org/abs/1312.5018.

[15] P.R. Halmos and A. Brown. Algebraic properties of toeplitz operators. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1964(213) :89–102, 1964.

[16] W. Rudin. *Real and Complex Analysis, 3rd Ed.* McGraw-Hill, Inc., 1987.

[17] D. Sarason. *Sub-Hardy Hilbert Spaces in the Unit Disk*. The University of Arkensas Lecture Notes in the Mathematical Sciences. Wiley-Interscience, 1994.

[18] D. Sarason. Local Dirichlet spaces as de Branges–Rovnyak spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(7) :2133–2139, 1997.